ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6-7 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

(Μονάδες 5)

ii. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$

(Μονάδες 10)

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

i. Αφού έχουμε κλάσμα $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$ πρέπει: $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$.

Επομένως το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f είναι το

$$A_f=R-\{-1,1\} \text{ ή } A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

ii. Το τριώνυμο $2x^2-5x+3$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=1>0\ ,$$

οπότε έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 1}{4}=\begin{cases} x_1=\dfrac{5+1}{4}=\dfrac{3}{2} \\ x_2=\dfrac{5-1}{4}=1 \end{cases}$$

Άρα $2x^2-5x+3=2(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$.

ii. Για κάθε $x\in A_f$ όπου $A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει:

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}=\frac{2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x+1}=\frac{2x-3}{x+1}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x\leq 3 \\ x^2, & 3<x<10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε τις τιμές: $f(-1), f(3)$ και $f(5)$.

Μονάδες 8

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=25$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού ισούται με την ένωση των διαστημάτων που ορίζουν οι κλάδοι της συνάρτησης, έτσι έχουμε: $(-\infty,3]\cup(3,10)=(-\infty,10)$.

Άρα $A=(-\infty,10)$

β) Επειδή $-1<3$ είναι: $f(-1)=2(-1)-5=-2-5=-7$

Επειδή $3=3$ είναι: $f(3)=2\cdot 3-5=6-5=1$

Επειδή $3<5$ είναι: $f(5)=5^2=25$

γ) Έχουμε,

$f(x)=25$ με $x\le 3$	και	$f(x)=25$ με $3<x<10$
$2x-5=25$		$x^2=25$
$2x=30$		$x=\pm 5$
$x=15$ (απορρίπτεται αφού $x\le 3$)		$x=-5$ (απορ.) ή $x=5$ (Δεκτή)

Άρα $f(x)=25$ όταν $x=5$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με παράμετρο $\lambda\in R$ (1)

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R$

(Μονάδες 10)

2. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

3. Να βρείτε το λ, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2-x+\lambda-\lambda^2}$ να είναι το σύνολο R .

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

1. Η εξίσωση $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με $\alpha=1$, $\beta=-1$ και $\gamma=\lambda-\lambda^2$

με διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(\lambda-\lambda^2)=1-4(\lambda-\lambda^2)=4\lambda^2-4\lambda+1=(2\lambda-1)^2\ge 0$$

Επομένως αφού $\Delta\ge 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R$

2. Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει

$$\Delta=0\Leftrightarrow(2\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$$

3. Θα πρέπει $x^2-x+\lambda-\lambda^2\ge 0$ για κάθε $x\in R$, επομένως θα πρέπει $\Delta\le 0$.

Όμως

$$\Delta=1-4(\lambda-\lambda^2)=(2\lambda-1)^2\ge 0$$

και συνεπώς:

$$\Delta\le 0\Leftrightarrow(2\lambda-1)^2\le 0\Leftrightarrow 2\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ

Μονάδες 9

β) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g

Μονάδες 9

ii) να δείξετε ότι $g(\alpha+3)>g(\alpha)$ όταν $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Αφού η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$ οι αριθμοί $-2,1$ μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Συνεπώς οι αριθμοί $-2,1$ είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2+\kappa x+\lambda=0$$

Αν x_1,x_2 ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ισχύει

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$$

Άρα

$$-2+1=-\frac{\kappa}{1}\Leftrightarrow \kappa=1 \text{ και } -2\cdot 1=\frac{\lambda}{1}\Leftrightarrow \lambda=-2$$

β) i) Αν x_1,x_2 ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ισχύει

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$$

Τότε

$$g(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)}=(x+1)(x-2)$$

ii) Το πρόσημο του $(x+1)(x-2)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$(x+1)(x-2)$		+	0	−	0	+	

από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι

- Για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ είναι $(x+1)(x-2)>0$
- Για κάθε $x\in(-1,2)$ είναι $(x+1)(x-2)<0$
- Για $x=-1$ ή $x=2$ είναι $(x+1)(x-2)=0$

Συνεπώς όταν $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)$ ισχύει

$$(\alpha+1)(\alpha-2)<0\Leftrightarrow g(\alpha)<0$$

Όταν $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)\Leftrightarrow(\alpha+3)\in(2,3)\cup(3,5)$ ισχύει

$$(\alpha+3+1)(\alpha+3-2)>0\Leftrightarrow g(\alpha+3)>0$$

Άρα ισχύει $g(\alpha+3)>g(\alpha)$ όταν $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)$

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

ii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης $\alpha,\beta\in R-\{0\}$.

(Μονάδες 9)

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

i. Πρέπει $x-3\neq 0\Leftrightarrow x\neq 3$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A_f=R-\{3\}$ ή $A_f=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$
.

ii. Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=1$$

άρα

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm 1}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{5+1}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{5-1}{2}=2 \end{cases}.$$

Οπότε,

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

Επομένως για κάθε $x\in A_f$ όπου $A_f=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ ισχύει

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}=x-2$$

iii. Για να βρω που τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ βάζω όπου $y=0$ ή $f(x)=0$, δηλαδή

$$f(x)=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2.$$

Άρα τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(2,0)$.

Για να βρω που τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα $y'y$ βάζω όπου $x=0$, δηλαδή

$$f(0)=0-2=-2.$$

Άρα τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0,-2)$.

ΘΕΜΑ 6

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = x^3 - x^2 + 3x - 3$$

Μονάδες 13

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,3)$.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$A = x^3 - x^2 + 3x - 3 = x^2(x-1) + 3(x-1) = (x-1)(x^2+3)$$

άρα

$$A = x^3 - x^2 + 3x - 3 = (x-1)(x^2+3)$$

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων f και g προκύπτουν από τις λύσεις τις εξίσωσης $f(x) = g(x)$, οπότε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x} = x^2 - x + 3 \overset{\cdot x}{\Leftrightarrow} x\frac{3}{x} = x \cdot x^2 - x \cdot x + x \cdot 3 \Leftrightarrow 3 = x^3 - x^2 + 3x \Leftrightarrow$$

$$x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} (x-1)(x^2+3) = 0 \Longleftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 + 3 = 0 \Longleftrightarrow$$

$x = 1$ ή $x^2 = -3$, αδύνατη

Ακόμα $f(1) = g(1) = 3$.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $A(1,3)$.

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται η συνάρτηση g , με $g(x) = \frac{2x^2 - 4x + \mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$

α. να δείξετε ότι $\mu = -6$

Μονάδες 9

β. να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 9

γ. για $\mu = -6$, να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α. Εφόσον $A(1,-4) \in C_g \Leftrightarrow g(1) = -4 \Leftrightarrow \frac{2-4+\mu}{2} = -4 \Leftrightarrow -2+\mu = -8 \Leftrightarrow$ $\mu = -6$

β. Για να ορίζεται η συνάρτηση g θα πρέπει $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ άρα $A_g = R - \{-1\}$

γ. Για $\mu = -6$ είναι

$$g(x) = \frac{2x^2-4x-6}{x+1} = \frac{2(x^2-2x-3)}{x+1} = \frac{2(x+1)(x-3)}{x+1} = 2(x-3) \ x \in R - \{-1\}$$

ΘΕΜΑ 8

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1-\lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

β. Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

(Μονάδες 8)

γ. Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)^2 = |x_1+x_2| + 2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. 1. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μία τουλάχιστον λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Έχουμε,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = \lambda x + (1-\lambda) \Leftrightarrow x^2 - \lambda x - (1-\lambda) = 0 \qquad (1)$$

Η (1) έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1[-(1-\lambda)] = \lambda^2 + 4(1-\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 \geq 0$$

που ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και το ίσον μόνο για $\lambda = 2$

Άρα η (1) έχει τουλάχιστον μία λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β. Οι C_f και C_g θα έχουν ένα κοινό σημείο, αν η εξίσωση (1) έχει μία διπλή ρίζα, δηλαδή αν $\Delta = 0$.

Είναι,

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \ ,$$

τότε η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα,

$$x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ διπλή ρίζα.}$$

Άρα το κοινό σημείο των C_f και C_g είναι το σημείο $M(1,1)$

γ. Αν $\lambda \neq 2$ τότε η (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1, x_2

Από τους τύπους VIETA έχουμε,

$$S=x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{-(-\lambda)}{1} \Leftrightarrow x_1+x_2=\lambda$$

και τότε

$$(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2 \Leftrightarrow (\lambda)^2=|\lambda|+2 \Leftrightarrow |\lambda|^2-|\lambda|-2=0 \quad (2)$$

Θεωρούμε, $\omega=|\lambda|$, με $\omega>0$ αφού $\lambda \neq 0$ οπότε η (2) ισοδύναμα γίνεται,

$\omega^2-\omega-2=0$ με $\Delta=9>0$ άρα

$$\omega=\frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow \omega=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \omega=\dfrac{1+3}{2}=\dfrac{4}{2}=2 & \text{δεκτή} \\ \omega=\dfrac{1-3}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 & \text{Απορ.} \end{cases}$$

οπότε

$$\omega=2 \Leftrightarrow |\lambda|=2 \Rightarrow \lambda=2 \text{ ή } \lambda=-2, \text{ όμως } \lambda \neq 2 \text{ άρα } \lambda=-2$$

ΘΕΜΑ 9

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α. Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

(Μονάδες 5)

β. Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$.

(Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

(Μονάδες 4)

γ. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Αν ο αθλητής κολυμπήσει 32 λεπτά ύπτιο καίγοντας 9 θερμίδες ανά λεπτό θα κάψει συνολικά $9 \cdot 32 = 288$ θερμίδες.

Έστω x τα λεπτά που θα κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες. Καίγοντας 12 θερμίδες το λεπτό αν κολυμπάει πεταλούδα τότε έχουμε την εξίσωση,

$$12 \cdot x + 288 = 360 \Leftrightarrow 12 \cdot x = 360 - 288 \Leftrightarrow x = \frac{72}{12} \Leftrightarrow x = 6$$

Άρα πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα 6 λεπτά.

β.i) Έστω x ο χρόνος σε λεπτά, που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο και y ο χρόνος σε λεπτά, που ο αθλητής κολυμπάει πεταλούδα. Οπότε ανάλογα με τις θερμίδες που καίει κάνοντας ύπτιο και πεταλούδα αντίστοιχα, θα έχουμε

$$9x + 12y = 360 \Leftrightarrow y = \frac{360 - 9x}{12} \Leftrightarrow y = 30 - \frac{3}{4}x$$

Άρα, ορίζουμε συνάρτηση f που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες ως $f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$

ii) Αφού x ο χρόνος σε λεπτά πρέπει να είναι θετικός ή μηδέν. Ακόμη $y = f(x)$ είναι αριθμός θερμίδων άρα πρέπει να είναι

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 30 - \frac{3}{4}x \geq 0 \Leftrightarrow 30 \geq \frac{3}{4}x \Leftrightarrow \frac{30 \cdot 4}{3} \geq x \Leftrightarrow 40 \geq x$$

Επομένως στα πλαίσια του προβλήματος η συνάρτηση f ορίζεται για

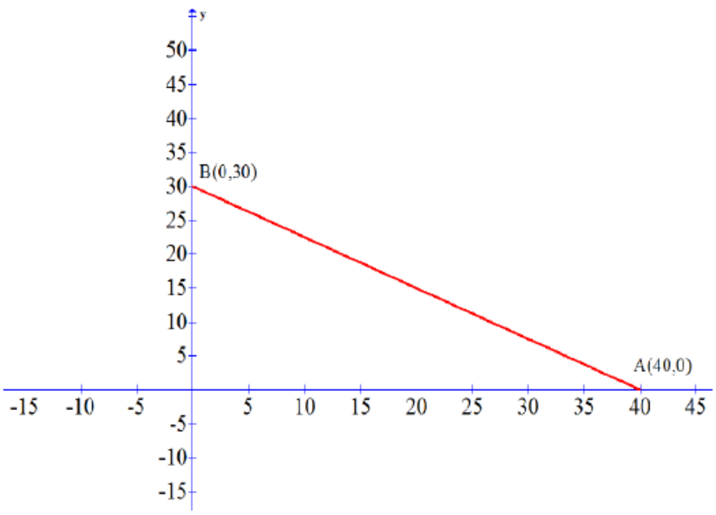
$$0 \leq x \leq 40 \text{ ή } x \in [0, 40]$$

3. Η C_f θα τέμνει τους άξονες,

$x'x$, για $y = 0$ είναι $30 - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow x = 40$, άρα στο σημείο $A(40, 0)$

$y'y$, για $x = 0$ είναι $f(0) = 30$, άρα στο σημείο $B(0, 30)$

Επομένως συνδέοντας τα σημεία A και B με $0 \leq x \leq 40$, η C_f είναι,



Το σημείο A δείχνει ότι αν ο αθλητής δεν κολυμπήσει καθόλου πεταλούδα, για να κάψει 360 θερμίδες, πρέπει να κολυμπήσει 40 λεπτά ύπτιο. Ενώ το σημείο B δείχνει ότι όταν ο αθλητής δεν κολυμπήσει ύπτιο, για να κάψει 360 θερμίδες, πρέπει να κολυμπήσει 30 λεπτά πεταλούδα .

ΘΕΜΑ 10

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α.

(Μονάδες 7)

2. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του α.

(Μονάδες 4)

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

1. Αρκεί να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου $(1,2)$ επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, δηλ. αρκεί $f(1) = 2$.

Είναι $f(1) = \alpha - \alpha + 2 = 2$

2. i) Αφού C_f και C_g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, είναι $g(1) = f(1) = 2$ οπότε

$$g(1) = 2 \Leftrightarrow 1 - \alpha + 3 = 2 \Leftrightarrow -\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

ii) Για $\alpha = 2$ αντίστοιχα έχουμε,

$$f(x) = 2x - 2 + 2 = 2x \text{ και } g(x) = x^2 - 2 + 3 = x^2 + 1$$

Οι C_f και C_g θα έχουν κοινά σημεία με τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = g(x)$$

Έχουμε,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

μοναδική λύση.

Άρα οι C_f και C_g έχουν μοναδικό σημείο τομής με συντεταγμένες $(1,2)$

3. Αρκεί η εξίσωση $f(x) = g(x)$ να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

Είναι,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \alpha x - \alpha + 2 = x^2 - \alpha + 3 \Leftrightarrow x^2 - \alpha x + 1 = 0$$

επομένως αρκεί η δευτεροβάθμια εξίσωση να έχει $\Delta > 0$

Έχουμε,

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 4 \Leftrightarrow |\alpha| > 2 \Leftrightarrow \alpha < -2 \quad \text{ή} \quad \alpha > 2$$

Άρα $\alpha \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

ΘΕΜΑ 11

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4, x\in R$.

1. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 5)

2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g.

(Μονάδες 10)

3. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

1. Οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού $A_f=A_g=\mathbb{R}$.

Για $x\in R$, έχουμε:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-2x=3x-4\Leftrightarrow x^2-2x-3x-4=0\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$$

αφού το τριώνυμο έχει $\alpha=1$, $\beta=-5$ και $\gamma=4$

διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot4=25-16=9>0$$

και ρίζες

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}\quad \text{άρα}\quad x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{5\pm3}{2}=\begin{cases}x_1=4\\ \text{ή}\\ x_2=1\end{cases}$$

Συνεπώς τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα $A(1,f(1))=(1,-1)$ και $B(4,f(4))=(4,8)$,

αφού

$$f(1)=1^2-2\cdot1=-1 \text{ και } g(1)=3\cdot1-4=-1 \text{ άρα } f(1)=g(1)=-1$$

και

$$f(4)=4^2-2\cdot4=8 \text{ και } g(4)=3\cdot4-4=8 \text{ άρα } f(4)=g(4)=8.$$

2. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g λύνουμε την ανίσωση

$$f(x)<g(x)\Longleftrightarrow x^2-2x<3x-4\Longleftrightarrow x^2-2x-3x-4<0\Longleftrightarrow x^2-5x+4<0$$

αφού το τριώνυμο έχει $\alpha=1$, $\beta=-5$ και $\gamma=4$

διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot4=25-16=9>0$$

και ρίζες

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{5\pm3}{2}=\begin{cases}x_1=4\\ \text{ή}\\ x_2=1\end{cases}$$

Άρα κατασκευάζω πίνακα τιμών

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Για να βρίσκεται κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, κάτω από τη γραφική παράσταση της f αρκεί να ισχύει $f(x)>\alpha$ για κάθε $\alpha<-1$.

Επομένως:

$$x^2-2x>\alpha \Leftrightarrow x^2-2x-\alpha>0,$$

η οποία ισχύει αφού το τριώνυμο $x^2-2x-\alpha$ έχει
$\alpha=1$, $\beta=-2$ και $\gamma=\alpha$ και διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4(-\alpha)=4+4\alpha=4(1+\alpha)<0$$

για κάθε $\alpha<-1 \Leftrightarrow \alpha+1<0$

Συνεπώς κάθε ευθεία με εξίσωση $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ 12

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα μα τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθυγράμμου τμήματος.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με $OM>600$ μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t=0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ με $OA=600$ μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, για $t\geq 0$ η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_\Lambda(t)=10t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση χελώνας από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_X(t)=600+40t$ μέτρα.

α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το σημείο Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα.

Μονάδες 10

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι $OM=2250$ μέτρα.

Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα;

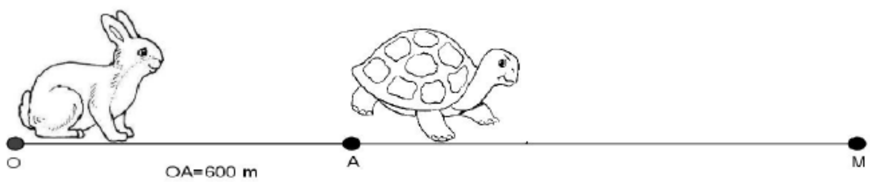
Μονάδες 5

ii) Ποιος τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t=12$ min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση;

Μονάδες 5

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής τον αγώνα;

Μονάδες 5



ΛΥΣΗ

α) Για να κερδίσει η χελώνα τον αγώνα θα πρέπει να ισχύει

$$S_X(t) > S_\Lambda(t) \Leftrightarrow 600 + 40t > 10t^2 \Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 < 0$$

Το τριώνυμο $t^2 - 4t - 60$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 16 + 240 = 256$$

Και ρίζες

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm 16}{2}$$

άρα,

$$t_1 = \frac{4+16}{2} = 10 \text{ και } t_2 = \frac{4-16}{2} = -6$$

Τότε έχουμε

$$t^2 - 4t - 60 < 0 \Leftrightarrow (t-10)(t+6) < 0 \Leftrightarrow t - 10 < 0 \Leftrightarrow t < 10 \,(\text{αφού } t + 6 > 0)$$

Είναι

$$0 \le t < 10 \Leftrightarrow 0 \le 40t < 400 \Leftrightarrow 600 \le 600 + 40t < 1000 \Leftrightarrow 600 \le S_X(t) < 1000$$

Άρα το σημείο Μ θα πρέπει να βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη των 1000 μέτρων από το Ο για να κερδίσει τον αγώνα η χελώνα.

β) i) Ο λαγός φτάνει την χελώνα όταν

$$S_X(t) = S_\Lambda(t) \Leftrightarrow 600 + 40t = 10t^2 \Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 10$$

και

$$t_2 = -6 \text{ απορρίπτεται}$$

Άρα ο λαγός φτάνει τη χελώνα τη χρονική στιγμή $t = 10\,\text{min}$

ii) Τη χρονική στιγμή $t = 12\,\text{min}$ είναι:

$$S_\Lambda(12) = 10 \cdot 12^2 = 10 \cdot 144 = 1440 \text{ και } S_X(12) = 600 + 40 \cdot 12 = 600 + 480 = 1080$$

Συνεπώς τη χρονική στιγμή $t = 12\,\text{min}$ ο λαγός προηγείται της χελώνας. Η μεταξύ τους απόσταση είναι $S_\Lambda(12) - S_X(12) = 1440 - 1080 = 360$ μέτρα.

iii) Αφού $OM = 2250 > 1000$ νικητής του αγώνα είναι ο λαγός, που τερματίζει όταν

$$S_\Lambda(t) = 2250 \Leftrightarrow 10t^2 = 2250 \Leftrightarrow t^2 = 225 \Leftrightarrow t = 15 \,(\text{αφού } t \ge 0)$$

Άρα ο νικητής του αγώνα τερματίζει τη χρονική στιγμή $t = 15\,\text{min}$

ΘΕΜΑ 13

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)^2 - 4$ και $g(x) = |x-1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

Μονάδες 9

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

Μονάδες 4

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, αν και μόνο αν $f(x) > 0$

Έχουμε,

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2 > 4 \Leftrightarrow |x-1| > 2 \Leftrightarrow$$
$$x-1 > 2 \text{ ή } x-1 < -2 \Leftrightarrow$$
$$x > 3 \text{ ή } x < -1$$

Συνεπώς η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| + 2 \geq 2 \Leftrightarrow g(x) \geq 2 \text{ τότε } g(x) > 0$$

Άρα για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των f και g είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$f(x) = g(x)$$

Έχουμε,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 - |x-1| - 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$|x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0 \ (1)$$

Θέτουμε $|x-1| = \omega \geq 0$

Τότε η (1) γίνεται $\omega^2 - \omega - 6 = 0$ με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 + 24 = 25$$

Και ρίζες

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

άρα,

$$\omega_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ και } \omega_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \text{ απορρίπτεται}$$

τότε

$$|x-1| = 3 \Leftrightarrow x-1 = 3 \text{ ή } x-1 = -3 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -2$$

Για $x = 4$, $f(4) = (4-1)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$

Για $x = -2$, $f(-2) = (-2-1)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα $A(-2, 5)$ και $B(4, 5)$

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 5

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=2x-\alpha$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f

Μονάδες 8

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(-1,1)$

Μονάδες 7

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει :

$$2x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{3}{2},\text{ άρα, } A=R-\left\{\frac{3}{2}\right\}=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right).$$

β) Έχουμε,

$4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha=4x^2-6x-2\alpha x+3\alpha=2x(2x-3)-\alpha(2x-3)=(2x-\alpha)(2x-3)$

Επομένως,

$$f(x)=\frac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}=\frac{(2x-\alpha)(2x-3)}{2x-3}=2x-\alpha,\text{ για κάθε } x\in A$$

γ) Είναι

$$f(-1)=1\Leftrightarrow 2\cdot(-1)-\alpha=1\Leftrightarrow -\alpha=3\Leftrightarrow \alpha=-3$$

δ) Για $x=0\in A$ έχουμε,

$y=2\cdot 0-\alpha \Leftrightarrow y=-\alpha$ άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,-\alpha)$

Για $y=0$ έχουμε,

$$0=2x-\alpha\Leftrightarrow x=\frac{\alpha}{2}$$

Επίσης πρέπει

$$x\in A \text{ δηλαδή } \frac{\alpha}{2}\neq\frac{3}{2}\Leftrightarrow \alpha\neq 3.$$

Αν $\alpha\neq 3$, τότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\left(\dfrac{\alpha}{2},0\right)$ ενώ αν $\alpha=3$ η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 15

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=|x|$, για κάθε $x\in A$

Μονάδες 10

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x>0$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Η $f(x)$ ορίζεται όταν:

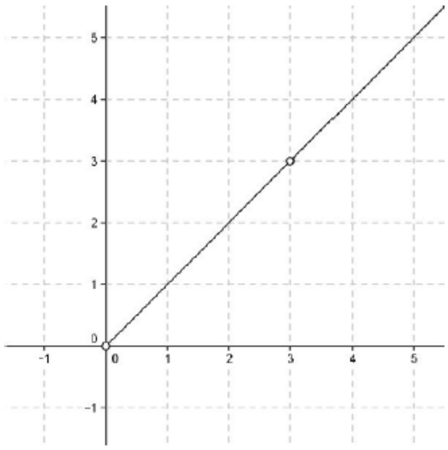
$$2|x|-6\neq 0 \Longleftrightarrow 2|x|\neq 6 \Longleftrightarrow |x|\neq 3 \Longleftrightarrow x\neq \pm 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

β) Ισχύει ότι:

$$f(x)=\frac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}=\frac{2|x|^2-6|x|}{2|x|-6}=\frac{2|x|(|x|-3)}{2(|x|-3)}=|x|$$

Άρα $f(x)=|x|$ για κάθε $x\in A$.



γ) Αν $x>0$, τότε $|x|=x$ η συνάρτηση f γίνεται $f(x)=x$ για κάθε $x\in(0,3)\cup(3,+\infty)$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

ΘΕΜΑ 16

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν A, B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x′x και y′y αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η υπόριζη ποσότητα είναι μη αρνητική και ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός.
Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{9-x^2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow 9-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{9} \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

επομένως είναι το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = (-3,3)$.

β) Το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ έχει τετμημένη μηδέν.
Οπότε για $x = 0$ στον τύπο της f έχουμε:

$$f(0) = \frac{0+2}{\sqrt{9-0}} = \frac{2}{3}$$, επομένως η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

Το σημείο (ή τα σημεία) στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ έχει τεταγμένη μηδέν.
Οπότε για $y = 0$ στον τύπο της f έχουμε: $0 = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$,

επομένως η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-2,0)$.

γ) Έστω $y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(-2,0)$ και $B\left(0, \frac{2}{3}\right)$. Οι συντεταγμένες των A και B ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας.
Οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} y_A = \alpha x_A + \beta \\ y_B = \alpha x_B + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha(-2) + \beta \\ \frac{2}{3} = \alpha \cdot 0 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = \beta \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases}$$

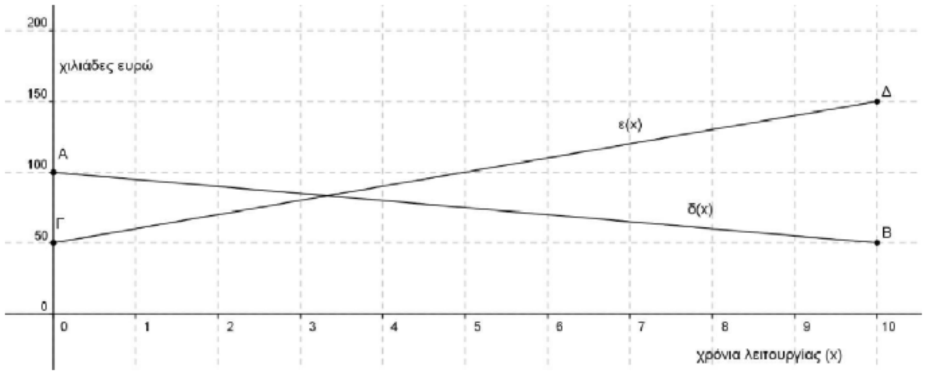
Συνεπώς η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

ΘΕΜΑ 17

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



1. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

(Μονάδες 4)

2 i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές

(Μονάδες 15)

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

1. Φέρνουμε κάθετη ευθεία στο σημείο 5 του οριζόντιου άξονα και στη συνέχεια από τα σημεία που αυτή τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varepsilon(x)$ και $\delta(x)$ κάθετη στον κατακόρυφο άξονα και εκτιμούμε ότι:

$$\varepsilon(x) \cong 100 \quad , \quad \delta(x) \cong 75$$

2.(i) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varepsilon(x)$ και $\delta(x)$ είναι της μορφής

$$f(x) = \alpha x + \beta$$

Έστω $\delta(x) = \alpha x + \beta$ και διέρχεται από τα σημεία $A(0,100)$ και $B(10,50)$ οπότε έχουμε

$$\delta(x) = \alpha x + \beta \Rightarrow \begin{cases} \delta(0) = 100 \\ \delta(10) = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 100 \\ 10\alpha + 100 = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 100 \\ \alpha = -5 \end{cases}$$

Άρα $\delta(x) = -5x + 100$

Αντίστοιχα θεωρούμε $\varepsilon(x) = \alpha x + \beta$ που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ έτσι είναι

$$\varepsilon(x) = \alpha x + \beta \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon(0) = 50 \\ \varepsilon(10) = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 50 \\ 10\alpha + 50 = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 50 \\ \alpha = 10 \end{cases}$$

Άρα $\varepsilon(x) = 10x + 50$

Για να ελέγξουμε τις εκτιμήσεις του ερωτήματος **1.** Υπολογίζουμε τις τιμές $\delta(5)$ και $\varepsilon(5)$ για τις συναρτήσεις που βρήκαμε, είναι

$$\delta(5) = -5 \cdot 5 + 100 = -25 + 100 = 75 \text{ και } \varepsilon(5) = 10 \cdot 5 + 50 = 50 + 50 = 100$$

Επομένως είναι σωστές οι εκτιμήσεις μας.

ii) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\delta(x), \varepsilon(x)$ θα τέμνονται σε σημείο με τετμημένη, λύση της εξίσωσης $\varepsilon(x) = \delta(x)$

Είναι

$$\varepsilon(x) = \delta(x) \Leftrightarrow 10x + 50 = -5x + 100 \Leftrightarrow 15x = 50 \Leftrightarrow x = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$$

Από τη λύση εξίσωσης καταλαβαίνουμε ότι η επιχείρηση στα $\frac{10}{3} \cong 3,3$ πρώτα χρόνια λειτουργίας της είχε έσοδα ίσα με τις δαπάνες της.

ΘΕΜΑ 18

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 12 + 0,5x & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6 & \text{αν } x > 30 \end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό.

(Μονάδες 2)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 3)

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο

$$g(x) = 12 + 0,6x\text{, για } x \geq 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό από τον κάτοικο της πόλης Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δυο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) i) Αφού ο κάτοικος δεν έχει καταναλώσει νερό θα πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή f(0). Βάζουμε x = 0 στον πρώτο κλάδο της συνάρτησης και έχουμε:

$$f(0)=12+0,5\cdot 0=12$$, δηλαδή θα πληρώσει 12 ευρώ.

ii) Ομοίως θα πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή f(10). Βάζουμε x=10 πάλι στον πρώτο κλάδο και έχουμε:

$$f(10)=12+0,5\cdot 10=12+5=17$$, δηλαδή θα πληρώσει 17 ευρώ.

iii) Θα πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή f(50). Σε αυτή την περίπτωση βάζουμε x=50 στο δεύτερο κλάδο της συνάρτησης και έχουμε:

$$f(50)=0,7\cdot 50+6=35+6=41$$, δηλαδή θα πληρώσει 41 ευρώ.

β) Έστω x ο ίδιος αριθμός των κυβικών μέτρων νερού που κατανάλωσαν ένας κάτοικος της πόλης Α και ένα κάτοικος της πόλης Β για το έτος 2013. Αφού ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό από τον κάτοικο της πόλης Β θα ισχύει: $f(x)>g(x)$.

Θα πρέπει , λόγω του τύπου της f , να διακρίνουμε περιπτώσεις.

- Αν $0\le x\le 30$, τότε:

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow 12+0,5x>12+0,6x \Leftrightarrow 0,5x>0,6x \Leftrightarrow 0,1x<0 \Leftrightarrow x<0$$, αδύνατο

- Αν $x>30$, τότε:

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow 0,7x+6>12+0,6x \Leftrightarrow 0,1x>6 \Leftrightarrow x>60$$

Επομένως ο καθένας από τους δύο κατοίκους κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

ΘΕΜΑ 19

Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6.500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος Κ(ν) της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ το μήνα.

Μονάδες 5

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα Ε(ν) της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση:

i) να μην έχει ζημιά.

Μονάδες 7

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Το μηνιαίο κόστος Κ(ν) της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ τον μήνα, προκύπτει ως εξής:

μηνιαίο κόστος = (σταθερό κόστος) + (μεταβλητό κόστος)

- Το σταθερό κόστος είναι τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας που ανέρχονται στο ποσό των 6.500 ευρώ.
- Το μεταβλητό κόστος της εταιρείας είναι το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ επί το πλήθος των τόνερ που γεμίζει το μήνα, οπότε το μεταβλητό κόστος είναι 15ν ευρώ το μήνα.

Επομένως, το μηνιαίο κόστος είναι: Κ(ν)=6500+15ν ευρώ τον μήνα

β) Τα μηνιαία έσοδα Ε(ν) της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ τον μήνα είναι η τιμή πώλησης ενός τόνερ επί το πλήθος πώλησης των τόνερ τον μήνα, δηλαδή Ε(ν)=25ν ευρώ τον μήνα.

γ) i) Για να μην έχει ζημιά η επιχείρηση, πρέπει τα μηνιαία έσοδά της να είναι μεγαλύτερα ή ίσα με τα μηνιαία έξοδά της, δηλαδή πρέπει:

$Κ(ν) \geq Ε(ν) \Leftrightarrow 6500+15ν \geq 25ν \Leftrightarrow 10ν \geq 6500 \Leftrightarrow ν \geq 650$ τόνερ τον μήνα.

Επομένως, πρέπει να πωλούνται τουλάχιστον 650 τόνερ κάθε μήνα.

ii) Το κέρδος της επιχείρησης P(ν) από την πώληση ν τόνερ τον μήνα, προκύπτει ως εξής:

P(ν) = (μηνιαία έσοδα) − (μηνιαία έξοδα)

= Ε(ν)−Κ(ν) = 25ν − 15ν − 6500

= 10ν−6500 ευρώ ανά μήνα

Το μηνιαίο κέρδος είναι τουλάχιστον 500 ευρώ τον μήνα όταν

$P(ν) \geq 500 \Leftrightarrow 10ν-6500 \geq 500 \Leftrightarrow 10ν \geq 7000 \Leftrightarrow ν \geq 700$ τόνερ τον μήνα.

Επομένως, η επιχείρηση πρέπει να πωλήσει τουλάχιστον 700 τόνερ τον μήνα, ώστε τα μηνιαία κέρδη της επιχείρησης να είναι τουλάχιστον 500 ευρώ τον μήνα.

ΘΕΜΑ 20

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 5

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \begin{cases} x-3 & , \ x > 2 \\ -x+3, & x < 2 \end{cases}$

Μονάδες 7

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x′x και y′y .

Μονάδες 8

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει: $|2-x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το

$$A = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

β) Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει άθροισμα $-\frac{\beta}{\alpha} = 5$ και γινόμενο $\frac{\gamma}{\alpha} = 6$, άρα οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί 2 και 3.

Επομένως,

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

- Για $x > 2$ τότε, $2 - x < 0$ άρα $|2-x| = -(2-x)$, οπότε

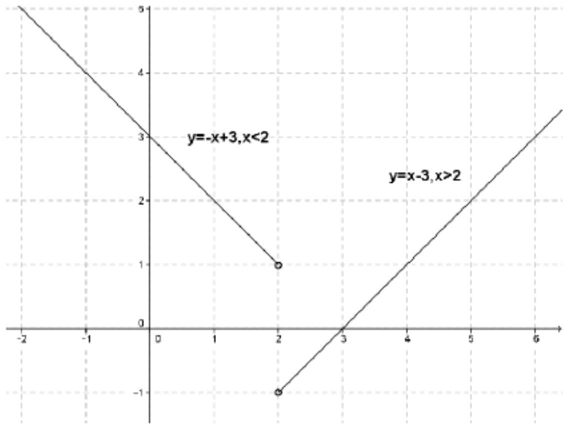
$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{-(2-x)} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x - 3$$

- Για $x < 2$ τότε, $2 - x > 0$ άρα $|2-x| = 2 - x$, οπότε

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2-x} = \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)} = -(x-3) = -x + 3$$

δηλαδή $f(x) = \begin{cases} x-3 & , \ x > 2 \\ -x+3, & x < 2 \end{cases}$

γ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η C_f τέμνει τον άξονα y΄y για $x = 0$, $f(0) = -0 + 3 = 3$, άρα σημείο τομής με τον άξονα y′y είναι το $(0,3)$.

Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x για $y = 0$,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{|2-x|} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \{x = 2 \ \text{ή} \ x = 3\}.$$

Προφανώς θα απορρίψουμε τη λύση $x = 2$, άρα το μοναδικό σημείο τομής με τον άξονα x′x είναι το $(3,0)$.

δ) Έχουμε,

$$f(x)\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{|2-x|}\le 0 \Leftrightarrow \left\{\left(x^2-5x+6\right)\le 0 \text{ αφού } |2-x|>0 \text{ για } x\in R-\{2\}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{(x-2)(x-3)\le 0 \;\; \text{για } x\in R-\{2\}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{(x-2)(x-3)\le 0 \;\; \text{για } x\in R-\{2\}\right\} \Leftrightarrow x\in[2,3]$$

ΘΕΜΑ 21

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2-2x-1$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση:

$$A(x)=\frac{x-1}{3x^2-2x-1}$$

και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

Μονάδες 9

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $|A(x)|=1$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου με $\Delta>0$ γίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}$$

Το τριώνυμο $3x^2-2x-1$ έχει

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot 3\cdot(-1)=16>0$$

και ρίζες

$$x_1=1 \text{ και } x_2=-\frac{1}{3}.$$

Επομένως:

$$3x^2-2x-1=3\cdot(x-1)\cdot\left(x-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=(x-1)\cdot(3x+1)$$

β) Για να ορίζεται ένα κλάσμα θα πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του 0.

Οπότε πρέπει: $3x^2-2x-1\neq 0$ άρα από το (α) ερώτημα $x\neq 1$ και $x\neq -\dfrac{1}{3}$

Είναι:

$$A(x)=\frac{x-1}{3x^2-2x-1}=\frac{x-1}{(x-1)\cdot(3x+1)}=\frac{\overset{1}{\cancel{x-1}}}{\cancel{(x-1)}\cdot(3x+1)}=\frac{1}{3x+1}$$

γ) Είναι:

$$|A(x)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{3x+1}\right| = 1 \overset{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|3x+1|} = 1 \Leftrightarrow |3x+1| = 1 \quad ①$$

Με τη βοήθεια της ιδιότητας $|x| = \rho \Leftrightarrow x = -\rho$ ή $x = \rho$ έχουμε:

$$|3x+1| = 1 \Leftrightarrow 3x+1 = -1 \text{ ή } 3x+1 = 1 \Leftrightarrow 3x = -2 \text{ ή } 3x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ ή } x = 0$$

ΘΕΜΑ 22

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 10x + 21 < 0$

Μονάδες 12

β) Δίνεται η παράσταση: $A = |x-3| + |x^2 - 10x + 21|$

i) Για $3 < x < 7$, να δείξετε ότι: $A = -x^2 + 11x - 24$

Μονάδες 8

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$, για τις οποίες ισχύει $A = 6$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = 100 - 84 = 16 > 0$$

και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow x_1 = 3 \quad \text{και} \quad x_2 = 7$$

Το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$x^2 - 10x + 21$		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα φαίνεται ότι η ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$ έχει λύσεις τα $x \in R$ για τα οποία ισχύει $3 < x < 7$, δηλαδή τα $x \in (3, 7)$

β) i) Για $3 < x \Leftrightarrow x - 3 > 0$ οπότε είναι:

$$|x-3| = x-3$$

Για $3 < x < 7$ από το (α) ερώτημα είναι $x^2 - 10x + 21 < 0$, οπότε είναι:

$$|x^2 - 10x + 21| = -(x^2 - 10x + 21)$$

Άρα,

$$A = |x-3| + |x^2 - 10x + 21| = (x-3) + \left[-\left(x^2 - 10x + 21\right)\right] = -x^2 + 11x - 24$$

Οπότε,

$$\boxed{A = -x^2 + 11x - 24}$$

ii) Είναι:

$$A = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 11x - 24 = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 11x - 30 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 11^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-30) = 121 - 120 = 1 > 0$$

και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow x_1 = 5 \quad \text{και} \quad x_2 = 6$$

ΘΕΜΑ 23

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε x ψA ισχύει: $f(x) = |x| - 2$

(Μονάδες 9)

3. Για x ψA, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

1. Για να ορίζεται η f πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του 0, δηλ. πρέπει

$$|x| - 3 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το

$$A = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty) \text{ ή } A = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

2. Η συνάρτηση f ισοδύναμα γράφεται $f(x) = \dfrac{|x|^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$, $x \in A$

Αν $|x| = \omega \geq 0$ τότε

$$|x|^2 - 5|x| + 6 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 5\omega + 6 = 0$$

με

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0$$

και έχει ρίζες

$$\omega = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \omega = 3 \text{ ή } \omega = 2$$

Έτσι,

$$\omega^2 - 5\omega + 6 = (\omega - 3)(\omega - 2) \overset{|x|=\omega}{=} (|x| - 3)(|x| - 2)$$

Άρα

$$f(x) = \frac{|x|^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3} = \frac{(|x| - 3)(|x| - 2)}{|x| - 3} = |x| - 2 \text{ και } x \in A$$

3. Έχουμε,

$$\left(f(x)+2\right)^2-4f(x)-5=0 \overset{\text{ερωτ.2}}{\Leftrightarrow} \left(|x|-2+2\right)^2-4\left(|x|-2\right)-5=0 \Leftrightarrow |x|^2-4|x|+3=0,$$

$x \in A$ και θεωρούμε $|x|=\omega \geq 0$, οπότε η τελευταία εξίσωση ισοδύναμα,

$$\omega^2-4\omega+3=0$$

με

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=4>0$$

και έχει ρίζες

$$\omega=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{4\pm2}{2}\Rightarrow\omega=3 \text{ ή } \omega=1$$

Αν $\omega=3\Rightarrow|x|=3\notin A$ και απορρίπτεται.

Αν $\omega=1\Rightarrow|x|=1\Leftrightarrow x=\pm1$ δεκτές ρίζες.

ΘΕΜΑ 24

Για δεδομένο $\lambda\in\mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(\lambda+1)x^2-(\lambda+1)x+2$, με $x\in\mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.

(Μονάδες 3)

2. Για $\lambda=-1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 4)

3. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2,0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

(Μονάδες 8)

4. Για $\lambda=1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

1. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $A_f=\mathbb{R}$ και η C_f θα διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ αν $f(2)=0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

Και είναι

$$f(0)=(\lambda+1)\cdot0^2-(\lambda+1)\cdot0+2=2 \text{ για κάθε } \lambda\in\mathbb{R}$$

2. Για $\lambda=-1$ έχουμε ότι

$$f(x)=(-1+1)\cdot x^2-(-1+1)\cdot x+2=2$$

οπότε η γραφική παράσταση της f είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ που διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$ και η γραφική της παράσταση είναι,

3. Αφού η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2,0)$ ισχύει $f(2)=0$ και ισοδύναμα είναι,

$$(\lambda+1)\cdot 2^2-(\lambda+1)\cdot 2+2=0 \Leftrightarrow 4\lambda+4-2\lambda-2+2=0 \Leftrightarrow 2\lambda=-4 \Leftrightarrow \lambda=-2$$

Για $\lambda=-2$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται,

$$f(x)=(-2+1)x^2-(-2+1)x+2 \Leftrightarrow f(x)=-x^2+x+2 \text{ με } x\in\mathbb{R}$$

Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ αν

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0$$

και είναι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot(-1)\cdot 2=9$$

άρα,

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot(-1)} \Rightarrow x=2 \text{ ή } x=-1$$

Άρα, η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ και στο σημείο $\Gamma(-1,0)$

4. Για $\lambda=1$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται,

$$f(x)=(1+1)\cdot x^2-(1+1)\cdot x+2 \Leftrightarrow f(x)=2x^2-2x+2 \text{ με } x\in\mathbb{R}$$

και το τριώνυμο $2x^2-2x+2$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot 2\cdot 2=-4<0,$$

άρα είναι ομόσημο του α και αφού $\alpha=2>0$ είναι

$$2x^2-2x+2>0 \Leftrightarrow f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα η C_f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x'x.

ΘΕΜΑ 25

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1, x\in\mathbb{R}$

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

2. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

3. Έστω $M(x,y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

1. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $A_f = \mathbb{R}$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έχουμε

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0 \ (1)$$

και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, άρα η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

2. Η C_f θα βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$ στα διαστήματα που είναι λύσεις της ανίσωσης,

$$f(x) < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$$

Όμως για το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχουμε διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0$$

και $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = 2 \ \text{ ή } \ x = -1$$

οπότε έχουμε

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	0	−	0	+

Άρα, $-1 < x < 2$ δηλαδή οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$ είναι τα $x \in (-1, 2)$

3. Λόγω του ερωτ.2., αρκεί να δείξουμε ότι, $x \in (-1, 2)$,είναι,

$$|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

δηλαδή $x \in (-1, 2)$

ΘΕΜΑ 26

Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 = \lambda(4x - 3)$ με παράμετρο $x \in R$.

1. Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \ \alpha \neq 0$.

(Μονάδες 5)

2.Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

3.Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$.

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

1. Είναι:

$$(x-2)^2=\lambda(4x-3)\Leftrightarrow x^2-4x+4=4\lambda x-3\lambda\Leftrightarrow$$
$$x^2-4x+4-4\lambda x+3\lambda=0\Leftrightarrow x^2-4(1+\lambda)x+4+3\lambda=0,$$

η οποία είναι στη μορφή

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ με $\alpha=1\neq 0$, $\beta=-4(1+\lambda)$ και $\gamma=4+3\lambda$.

2. Το τριώνυμο $x^2-4(1+\lambda)x+4+3\lambda$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=[-4(\lambda+1)]^2-4\cdot(4+3\lambda)=16(\lambda+1)^2-4(4+3\lambda)=4[4(\lambda^2+2\lambda+1)-(4+3\lambda)]$$
$$=4(4\lambda^2+8\lambda+4-4-3\lambda)=4(4\lambda^2+5\lambda)$$

Το τριώνυμο $4\lambda^2+5\lambda$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=5^2-4\cdot4\cdot0=25$$

και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\ \text{άρα}\ \lambda_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25}}{2\cdot4}=\frac{-5\pm5}{8}=\begin{cases}\dfrac{-5+5}{8}=0\\ \text{ή}\\ \dfrac{-5-5}{8}=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

ενώ ισχύει

λ	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$		0	$+\infty$
$4\lambda^2+5\lambda$	$+$	0	$-$	0	$+$

Η εξίσωση

$$x^2-4(1+\lambda)x+4+3\lambda=0\ (1),$$

έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, όταν

$$\Delta>0\Leftrightarrow 4(4\lambda^2+5\lambda)>0\Leftrightarrow\lambda<-\frac{5}{4}\ \text{ή}\ \lambda>0.$$

3. i) Για $\lambda<-\frac{5}{4}$ ή $\lambda>0$ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες x_1,x_2, με άθροισμα

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-4(1+\lambda)}{1}=4(1+\lambda)$$

και γινόμενο

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{4+3\lambda}{1}=4+3\lambda$$

ii) Για $\lambda<-\frac{5}{4}$ ή $\lambda>0$ έχουμε ότι:

$$A=(4x_1-3)(4x_2-3)=16x_1x_2-12x_1-12x_2+9=16x_1x_2-12(x_1+x_2)+9=16P-12S+9$$
$$=16(4+3\lambda)-12\cdot4(1+\lambda)+9=64+48\lambda-48-48\lambda+9=25$$

που είναι ανεξάρτητη του λ.

ΘΕΜΑ 27

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{\alpha}{4}}$

1. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

2. Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας.

(Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

1. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x^2-x+\frac{\alpha}{4}\geq 0$.

Για να ορίζεται η συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, πρέπει η ανίσωση $x^2-x+\frac{\alpha}{4}\geq 0$ να ισχύει για κάθε $x\in R$, δηλαδή θα πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι μη θετική.

Συνεπώς πρέπει:

$$\Delta\leq 0 \Leftrightarrow (-1)^2-4\cdot 1\cdot\frac{\alpha}{4}\leq 0 \Leftrightarrow 1-\alpha\leq 0 \Leftrightarrow \alpha\geq 1.$$

2. i) Αν $\alpha\geq 1$, η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, οπότε:

$$f(0)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{0^2-0+\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha=1, \text{ που είναι δεκτή.}$$

Για $\alpha=1$, έχουμε:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\left|x-\frac{1}{2}\right|.$$

ii) Έχουμε,

$$f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \text{ ή } x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=0.$$

ΘΕΜΑ 28

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

- $|1-3\alpha| < 2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1.

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3} < \alpha < 1$

Μονάδες 5

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta - 3\alpha - 1| < 3$

Μονάδες 10

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4(\beta-2)x + \beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Είναι,

$$|1-3\alpha| < 2 \Leftrightarrow |3\alpha - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < 3\alpha - 1 < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \alpha < 1$$

β) Έχουμε,

$$|\beta - 2| < 1 \Rightarrow -1 < \beta - 2 < 1 \Rightarrow 1 < \beta < 3 \ (1)$$

και

$$-\frac{1}{3} < \alpha < 1 \Rightarrow 1 > -3\alpha > -3 \Rightarrow -3 < -3\alpha < 1 \ (2)$$

προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2),

$$-2 < \beta - 3\alpha < 4 \Rightarrow -3 < \beta - 3\alpha - 1 < 3 \Rightarrow |\beta - 3\alpha - 1| < 3$$

γ) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $4x^2 - 4(\beta-2)x + \beta^2$ είναι

$$\begin{aligned}\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma &= 16(\beta-2)^2 - 16\beta^2 \\ &= 16\left[(\beta-2)^2 - \beta^2\right] \\ &= 16(\beta - 2 - \beta)(\beta - 2 + \beta) \\ &= -64(\beta - 1) < 0\end{aligned}$$

γιατί

$$|\beta - 2| < 1 \Leftrightarrow 1 < \beta < 3 \text{ άρα } \beta > 1 \Rightarrow \beta - 1 > 0$$

Επομένως, $\Delta < 0$ άρα το τριώνυμο είναι πάντα ομόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή θετικό για κάθε πραγματικό αριθμό x, αφού $\alpha = 4 > 0$.